Тема: ***Дифференциальные уравнения 1-го порядка. Основные понятия. Задача Коши. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными***

Тлеулесова Айгеим Мекемтасовна

Цель лекции:

Сформировать у студентов понимание основных типов дифференциальных уравнений первого порядка, их решения, постановки задачи Коши, а также освоить метод решения уравнений с разделяющимися переменными.

Основные вопросы:

1. ***Понятие дифференциального уравнения первого порядка.***
2. ***Общее и частное решение дифференциального уравнения.***
3. ***Задача Коши: формулировка и геометрический смысл.***
4. ***Метод решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.***

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Дифференциальным уравнением*** *называется уравнение, связывающее независимую переменную* x, *искомую функцию* $y = y(x)$ *и ее производные*

$$y'(x)\ ,\ y''(x)\ ,\ \ldots\ ,\ y^{(n)}(x)\ .$$

$\Rightarrow$ в общем случае ДУ имеет вид

$$F(x, y\ , y'\ , y''\ , y'''\ , \ldots\ , y^{(n)}) = 0\ .$$

Порядок старшей производной, входящей в ДУ, называется ***порядком дифференциального уравнения***.

ПРИМЕР. Определить порядок уравнений:

$$y' + xy - x^2 = 0, \qquad x(y')^2 + e^x = 0, \qquad (y')^5 + e^{y^2} = 0,$$

$$xy'' - (y')^3 - y = 0, \qquad y'' - y' = 1, \qquad y^2 - y''' + x^5 = 0.$$

Функция $y = \varphi(x)$ называется ***решением дифференциального уравнения*** на интервале $(a;b)$, если при ее подстановке в это уравнение получается тождество, справедливое для всех x из интервала $(a;b)$.

ПРИМЕР.

1) $y = \cos x$ – решение ДУ $y'' + y = 0$ на $(-\infty, +\infty)$;

2) $y = \sqrt{1-x^2}$ – решение ДУ $y' = -\dfrac{x}{y}$ в интервале $(-1;1)$.

Уравнение $\Phi(x,y) = 0$, задающее в неявном виде решение дифференциального уравнения, называется ***интегралом дифференциального уравнения***.

График решения (интеграла) дифференциального уравнения называется ***интегральной кривой***.

Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется ***интегрированием дифференциального уравнения***.

Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения $y' = f(x,y)$

Общий вид ДУ 1-го порядка:

$$F(x, y, y') = 0 \,, \qquad (1)$$

где x – независимое переменное, y – неизвестная функция, F – заданная функция трех переменных.

Дифференциальное уравнение первого порядка, которое можно записать в виде

$$y' = f(x,y) \qquad (2)$$

называется ***уравнением первого порядка***, ***разрешенным относительно производной***.

ТЕОРЕМА 1 (Коши).

Пусть для уравнения $y' = f(x,y)$ *выполняются два условия:*

1) $f(x,y)$ *непрерывна в некоторой области D плоскости* xOy,

2) $f'_y(x,y)$ *в области D ограничена.*

Тогда для любой точки $M_0(x_0, y_0) \in D$ *существует единственное решение* $y = \varphi(x)$ *уравнения* (2), *определенное в некотором интервале* $(a;b)$ *содержащем точку* x_0, *и удовлетворяющее условию* $y_0 = \varphi(x_0)$.

Числа x_0, y_0 называются ***начальными значениями (данными)*** для решения $y = \varphi(x)$.

Условие $y(x_0) = y_0$ называется ***начальным условием***.

Геометрически, задание начального условия означает, что на плоскости xOy задается точка (x_0, y_0), через которую проходит интегральная кривая $y(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Общим решением*** *дифференциального уравнения* $y' = f(x,y)$ *в области* D *существования и единственности решения задачи Коши называется функция*

$$y = \varphi(x, C),$$

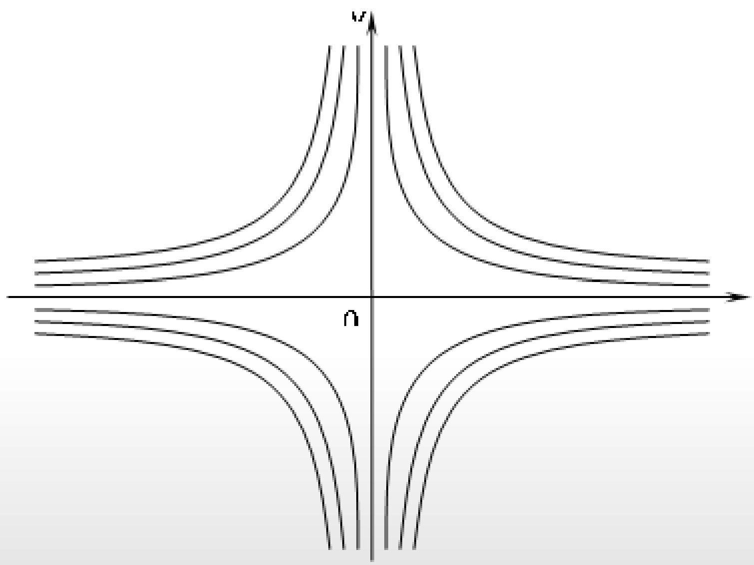
зависящая от x *и одной произвольной постоянной* C, *которая удовлетворяет следующим двум условиям:*

1) *при любом допустимом значении постоянной* C *она удовлетворяет уравнению* (2);
2) *каково бы ни было начальное условие* $y(x_0) = y_0$ (*где* $(x_0, y_0) \in D$), *можно найти единственное значение* $C = C_0$ *такое, что функция* $y = \varphi(x, C_0)$ *удовлетворяет данному начальному условию.*

Уравнение $\Phi(x, y, C) = 0$, задающее общее решение в неявном виде, называется ***общим интегралом уравнения***.

ПРИМЕР.

$$y' = \frac{y}{x}; \qquad y = \frac{c}{x} \quad - \quad \text{общее решение.}$$



ДУ 1-го порядка, разрешенное относительно y', имеет две формы записи:

1) обычную, т.е. $y' = f(x,y)$,

2) ***дифференциальную***, т.е.

$$M(x\,,y)dx + N(x\,,y)dy = 0\ . \qquad (3)$$

При этом, если уравнение записано в виде (3), то обычно предполагают, что переменные x и y равноправны.

Дифференциальным уравнением с разделенными переменными называется уравнение, дифференциальная форма которого имеет вид

$$f(x)dx + g(y)dy = 0\ , \qquad (4)$$

где $f(x)$ и $g(y)$ – непрерывные функции.

Пусть $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$,
$G(y)$ – первообразная функции $g(y)$.

Тогда общий интеграл уравнения (4) имеет вид:

$$F(x) + G(y) = C,$$

где C – произвольная постоянная.

Замечание. В теории дифференциальных уравнений символом

$$\int f(x)dx$$

принято обозначать ОДНУ из первообразных функции $f(x)$ (а не все множество первообразных, как это принято в других разделах математического анализа).

Поэтому общий интеграл уравнения (4) принято записывать в виде:

$$\int f(x)\,dx = \int g(y)\,dy \quad \text{или} \quad \int M(x)\,dx + \int N(y)\,dy = 0$$

§4. Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение, дифференциальная форма которого имеет вид

$$M_1(x)\cdot N_1(y)dx + M_2(x)\cdot N_2(y)dy = 0, \qquad (5)$$

где $M_1(x), N_1(y), M_2(x), N_2(y)$ – непрерывные функции.

Разделим обе части уравнения на $N_1(y) \cdot M_2(x)$:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0,$$

$\Rightarrow$ Общий интеграл уравнения (5) имеет вид:

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C,$$

$$(x^2-1)\cdot y^{'}+2x\cdot y^2=0$$

$$y^{'}=\frac{dy}{dx},\qquad (x^2-1)\cdot\frac{dy}{dx}=-2x\cdot y^2,$$

умножим на $\dfrac{dx}{(x^2-1)\cdot y^2}$ получим:

$$\frac{dy}{y^2}=-\frac{2x}{x^2-1}dx$$

$$-\frac{1}{y}=-ln|x^2-1|+c,$$

$$\frac{1}{y}=ln|x^2-1|+c,$$

$$y=\frac{1}{ln|x^2-1|+c}.$$

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение дифференциального уравнения первого порядка.
2. Что называется общим и частным решением дифференциального уравнения?
3. В чем заключается задача Коши и каков её геометрический смысл?
4. Какие условия обеспечивают существование и единственность решения задачи Коши?
5. Приведите определение уравнения с разделяющимися переменными.
6. Как решаются дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными?
7. Какой вид имеют интегральные кривые ДУ 1-го порядка?

Рекомендуемая литература:

1. Қасымов Қ., Қасымов Ә. Жоғары математика курсы. Алматы, Санат, 1994
2. Дүйсек А.К., Қасымбеков С.Қ. Жоғары математика. Алматы, ҚБТУ, 2004
3. Айдос Е.Ж. Жоғары математика (қысқаша курс). Алматы, Иль-Тех-Кітап, 2003
4. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики – М.: «Наука». – 1989. – 656 с.
5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, ч.1, М: «Наука». – 1982.
6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия М: «Наука». – 1991.
7. Шипачев В.С. Высшая математика
8. Ефимов Н.В., Краткий курс аналитической геометрии.
9. Махмеджанов Н.М. Жоғары математика.